

**KRZYSZTOF TESCH**

# **mechanika** **plynów**

**GDAŃSK 2013**

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Janusz T. Cieśliński*

RECENZENT

*Romuald Puzyrewski*

PROJEKT OKŁADKI

*Katarzyna Olszonowicz*

Wydanie II – 2008

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem  
<http://www.pg.gda.pl/wydawnictwo/oferta>

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2013

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-489-4

# Spis treści

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Wstęp</b>                                                               | <b>7</b>  |
| 1.1. Mechanika płynów . . . . .                                               | 7         |
| 1.2. Podstawowe pojęcia. . . . .                                              | 7         |
| 1.3. Zakres pracy . . . . .                                                   | 8         |
| 1.4. Notacja . . . . .                                                        | 9         |
| <b>2. Teoria pola</b>                                                         | <b>11</b> |
| 2.1. Pola skalarne, wektorowe i tensorowe . . . . .                           | 11        |
| 2.2. Izolinie i izopowierzchnie . . . . .                                     | 11        |
| 2.3. Linie pola wektorowego . . . . .                                         | 12        |
| 2.4. Operatory różniczkowania przestrzennego . . . . .                        | 13        |
| 2.4.1. Gradient . . . . .                                                     | 13        |
| 2.4.2. Dywergencja . . . . .                                                  | 15        |
| 2.4.3. Rotacja . . . . .                                                      | 16        |
| 2.4.4. Operator Laplace’a i operator biharmoniczny . . . . .                  | 17        |
| 2.4.5. Pochodna kierunkowa . . . . .                                          | 20        |
| 2.5. Tożsamości wektorowe . . . . .                                           | 22        |
| 2.6. Potencjał skalarny i wektorowy . . . . .                                 | 24        |
| 2.7. Całkowanie pól skalarnych i wektorowych . . . . .                        | 26        |
| 2.7.1. Całka krzywoliniowa nieskierowana . . . . .                            | 26        |
| 2.7.2. Całka krzywoliniowa skierowana . . . . .                               | 27        |
| 2.7.3. Całka powierzchniowa niezorientowana . . . . .                         | 28        |
| 2.7.4. Całka powierzchniowa zorientowana . . . . .                            | 29        |
| 2.7.5. Strumienie . . . . .                                                   | 31        |
| 2.8. Twierdzenia całkowite teorii pola . . . . .                              | 33        |
| 2.8.1. Twierdzenie Gaussa . . . . .                                           | 33        |
| 2.8.2. Twierdzenie Greena . . . . .                                           | 36        |
| 2.8.3. Twierdzenie Stokesa. . . . .                                           | 37        |
| 2.8.4. Wzory Greena . . . . .                                                 | 39        |
| <b>3. Kinematyka i równanie zachowania masy</b>                               | <b>41</b> |
| 3.1. Metody opisu stanu płynu . . . . .                                       | 41        |
| 3.2. Linie i powierzchnie prądu, trajektorie oraz linie i powierzchnie wirowe | 45        |
| 3.3. Opis ruchu elementu płynu . . . . .                                      | 46        |
| 3.4. Deformacje elementu płynu . . . . .                                      | 50        |
| 3.5. I twierdzenie Helmholtza o wirowości . . . . .                           | 54        |
| 3.6. Jakobian i dylatacja . . . . .                                           | 56        |

|           |                                                               |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 3.7.      | Twierdzenie Reynoldsa o transporcie . . . . .                 | 58         |
| 3.8.      | Równanie zachowania masy . . . . .                            | 63         |
| 3.9.      | Funkcja prądu. . . . .                                        | 67         |
| <b>4.</b> | <b>Dynamika</b>                                               | <b>70</b>  |
| 4.1.      | Siły i stan naprężenia w płynie. . . . .                      | 70         |
| 4.2.      | Równanie zachowania pędu . . . . .                            | 72         |
| 4.3.      | Równanie zachowania momentu pędu . . . . .                    | 74         |
| 4.4.      | Równania konstytutywne płynów newtonowskich . . . . .         | 76         |
| 4.5.      | Równania Naviera-Stokesa i Eulera . . . . .                   | 82         |
| <b>5.</b> | <b>Energia i entropia</b>                                     | <b>85</b>  |
| 5.1.      | Równanie zachowania energii . . . . .                         | 85         |
| 5.2.      | Równanie Gibbsa . . . . .                                     | 88         |
| 5.3.      | Druga zasada termodynamiki dla ośrodków ciągłych . . . . .    | 88         |
| 5.4.      | Pierwsza zasada termodynamiki dla ośrodków ciągłych . . . . . | 90         |
| 5.5.      | Dyssypacja energii mechanicznej . . . . .                     | 92         |
| 5.5.1.    | Pojęcie dyssypacji . . . . .                                  | 92         |
| 5.5.2.    | Funkcja dyssypacji . . . . .                                  | 93         |
| 5.5.3.    | Niezmienność dyssypacji . . . . .                             | 95         |
| <b>6.</b> | <b>Statyka</b>                                                | <b>98</b>  |
| 6.1.      | Układ równań . . . . .                                        | 98         |
| 6.2.      | Powierzchnia rozdziału . . . . .                              | 100        |
| 6.3.      | Całkowanie równania równowagi i prawo Pascala . . . . .       | 100        |
| 6.4.      | Napór i paradoks hydrostatyczny . . . . .                     | 102        |
| 6.5.      | Moment naporu hydrostatycznego . . . . .                      | 104        |
| 6.6.      | Wypór hydrostatyczny i prawo Archimedesesa . . . . .          | 106        |
| 6.7.      | Warunek pływania ciał . . . . .                               | 107        |
| <b>7.</b> | <b>Przepływy płynów lepkich</b>                               | <b>109</b> |
| 7.1.      | Problem domknięcia układów równań . . . . .                   | 109        |
| 7.2.      | Warunki zgodności . . . . .                                   | 111        |
| 7.3.      | Ogólne równanie transportu. . . . .                           | 112        |
| 7.4.      | Warunki brzegowe . . . . .                                    | 113        |
| 7.5.      | Bezwymiarowa postać podstawowych równań . . . . .             | 116        |
| 7.5.1.    | Równanie zachowania masy . . . . .                            | 117        |
| 7.5.2.    | Równanie zachowania pędu . . . . .                            | 118        |
| 7.5.3.    | Równanie energii wewnętrznej . . . . .                        | 118        |
| 7.6.      | Linearyzacja równania Naviera-Stokesa. . . . .                | 119        |
| 7.6.1.    | Równanie Stokesa . . . . .                                    | 120        |
| 7.6.2.    | Równanie Oseena. . . . .                                      | 120        |
| 7.6.3.    | Linearyzacja przez iteracje . . . . .                         | 121        |
| 7.7.      | Przepływy pełzające . . . . .                                 | 122        |
| 7.7.1.    | Dwuwymiarowe przepływy pełzające. . . . .                     | 123        |
| 7.7.2.    | Twierdzenie Helmholtza o minimum dyssypacji. . . . .          | 129        |
| 7.7.3.    | Wariacyjne sformułowanie zagadnienia Stokesa . . . . .        | 131        |

|            |                                                                               |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.8.       | Równanie Helmholtza . . . . .                                                 | 133        |
| 7.9.       | Zapis równania Naviera-Stokesa za pomocą funkcji prądu . . . . .              | 134        |
| 7.10.      | Niektóre rozwiązania analityczne równania Naviera-Stokesa . . . . .           | 135        |
| 7.10.1.    | Rozwiązania dokładne . . . . .                                                | 137        |
| 7.10.2.    | Rozwiązania przybliżone . . . . .                                             | 140        |
| <b>8.</b>  | <b>Przepływy płynów nielepkich</b>                                            | <b>145</b> |
| 8.1.       | Układ równań . . . . .                                                        | 146        |
| 8.2.       | Adiabata Poissona . . . . .                                                   | 147        |
| 8.3.       | Równanie Bernoulliego . . . . .                                               | 147        |
| 8.4.       | Twierdzenie Kelvina o cyrkulacji . . . . .                                    | 149        |
| 8.5.       | Twierdzenie Lagrange'a i III twierdzenie Helmholtza o wirowości . . . . .     | 150        |
| 8.6.       | II twierdzenie Helmholtza o wirowości . . . . .                               | 151        |
| 8.7.       | Przepływy potencjalne. . . . .                                                | 152        |
| 8.7.1.     | Twierdzenie Kelvina o minimum energii kinetycznej . . . . .                   | 152        |
| 8.7.2.     | Całka Lagrange'a. . . . .                                                     | 153        |
| 8.7.3.     | Zamknięte układy równań dla przepływów potencjalnych . . . . .                | 154        |
| 8.7.4.     | Dwuwymiarowe przepływy nieściśliwe i potencjalne . . . . .                    | 155        |
| 8.7.5.     | Potencjał zespolony . . . . .                                                 | 156        |
| <b>9.</b>  | <b>Laminarna warstwa przyścienna</b>                                          | <b>173</b> |
| 9.1.       | Równania Prandtla . . . . .                                                   | 174        |
| 9.2.       | Liniowe miary redukcji. . . . .                                               | 176        |
| 9.3.       | Zadanie Blasiusa . . . . .                                                    | 177        |
| 9.4.       | Równanie Kármána . . . . .                                                    | 181        |
| <b>10.</b> | <b>Gazodynamika</b>                                                           | <b>185</b> |
| 10.1.      | Warunki zgodności na powierzchniach nieciągłości. . . . .                     | 185        |
| 10.2.      | Prędkość dźwięku . . . . .                                                    | 185        |
| 10.3.      | Propagacja małych zaburzeń – równania akustyki . . . . .                      | 186        |
| 10.4.      | Propagacja dużych zaburzeń . . . . .                                          | 191        |
| 10.5.      | Liczba Macha i współczynnik prędkości. Parametry krytyczne . . . . .          | 195        |
| 10.6.      | Prostopadła fala uderzeniowa . . . . .                                        | 197        |
| 10.7.      | Dysza de Laval . . . . .                                                      | 201        |
| 10.8.      | Równanie Crocco . . . . .                                                     | 203        |
| 10.9.      | Potencjalny przepływ gazu . . . . .                                           | 204        |
| <b>11.</b> | <b>Turbulencja</b>                                                            | <b>206</b> |
| 11.1.      | Skale Kolmogorowa . . . . .                                                   | 206        |
| 11.2.      | Dekompozycja i średnie . . . . .                                              | 208        |
| 11.3.      | Równanie Reynoldsa . . . . .                                                  | 210        |
| 11.4.      | Filtracja równania Naviera-Stokesa . . . . .                                  | 212        |
| 11.5.      | Niektóre miary turbulencji . . . . .                                          | 214        |
| 11.6.      | Równanie transportu naprężeń Reynoldsa. . . . .                               | 215        |
| 11.7.      | Hipoteza Boussinesq. Lepkość turbulentna . . . . .                            | 218        |
| 11.8.      | Dyssypacja . . . . .                                                          | 219        |
| 11.9.      | Równanie Fouriera-Kirchhoffa w turbulencji. Dyfuzyjność turbulentna . . . . . | 221        |

|                                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| 11.10. Przepływy w pobliżu konturów . . . . .                             | 223        |
| 11.10.1. Przepływ między płaskimi płytkami . . . . .                      | 223        |
| 11.10.2. Droga mieszania . . . . .                                        | 225        |
| 11.10.3. Turbulentna warstwa przyścienna . . . . .                        | 227        |
| 11.11. Modele turbulencji . . . . .                                       | 229        |
| 11.11.1. Model zerorównaniowy . . . . .                                   | 230        |
| 11.11.2. Model jednorównaniowy . . . . .                                  | 231        |
| 11.11.3. Model dwurównaniowy $k-\varepsilon$ . . . . .                    | 233        |
| 11.11.4. Model dwurównaniowy $k-\omega$ . . . . .                         | 237        |
| 11.11.5. Model oparty na transporcie naprężeń Reynoldsa . . . . .         | 238        |
| 11.12. Ogólne równanie transportu wielkości skalarnej . . . . .           | 239        |
| 11.13. Uwagi na temat ściśliwości w turbulencji . . . . .                 | 240        |
| <b>12. Przepływy wieloskładnikowe i wielofazowe</b>                       | <b>244</b> |
| 12.1. Udziały składnikowe . . . . .                                       | 244        |
| 12.2. Prędkość barycentryczna i dyfuzyjna . . . . .                       | 248        |
| 12.3. Przepływy wieloskładnikowe . . . . .                                | 249        |
| 12.3.1. Transport masy . . . . .                                          | 249        |
| 12.3.2. Prawo Ficka . . . . .                                             | 251        |
| 12.3.3. Układ równań dla przypadku nieściśliwego . . . . .                | 251        |
| 12.3.4. Turbulentne przepływy wieloskładnikowe . . . . .                  | 253        |
| 12.4. Przepływy wielofazowe . . . . .                                     | 256        |
| 12.4.1. Równanie zachowania masy . . . . .                                | 256        |
| 12.4.2. Równanie zachowania pędu . . . . .                                | 259        |
| 12.4.3. Równanie konstytutywne . . . . .                                  | 261        |
| 12.4.4. Równanie zachowania energii . . . . .                             | 262        |
| 12.4.5. Równanie Gibbsa . . . . .                                         | 265        |
| 12.4.6. Równanie bilansu entropii . . . . .                               | 265        |
| 12.4.7. Równanie Fouriera-Kirchhoffa . . . . .                            | 267        |
| 12.4.8. Układ równań dla przepływów wielofazowych nieściśliwych . . . . . | 271        |
| 12.4.9. Ogólne równanie transportu wielkości skalarnej . . . . .          | 272        |
| <b>13. Rozwiązania</b>                                                    | <b>274</b> |
| <b>Literatura</b>                                                         | <b>289</b> |
| <b>Indeks</b>                                                             | <b>290</b> |